



ÉNIGME

- PATINOIRE RÉGIONALE -

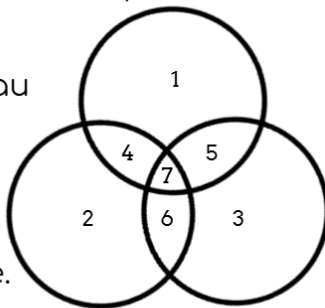
Énoncé de l'énigme

Mariame fait du patin sur une glace neuve. En patinant, elle effectue des figures qui tracent des cercles parfaits, toujours de même taille. Elle tente de diviser la glace en le plus de régions fermées possible et arrive à en créer 7 après avoir fait 3 figures.

Combien de régions fermées pourra-t-elle tracer au maximum lorsqu'elle fera sa quatrième figure ?

Combien de régions fermées pourra-t-elle tracer au maximum lorsqu'elle fera sa quatrième figure?

- Mariame trace des cercles parfaits, tous de même taille.
- Elle peut dessiner au plus 7 régions avec trois cercles.
- On ne compte pas la région extérieure.



lamagiedesmaths.ulaval.ca



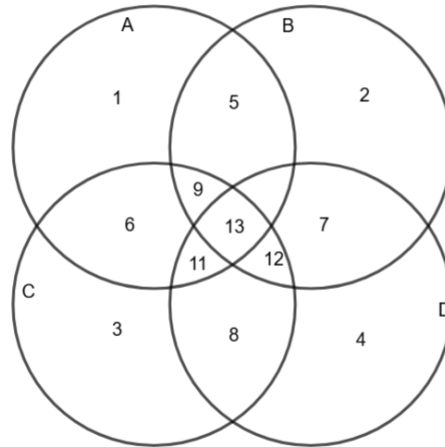


SOLUTION DE L'ÉNIGME



Voici la réponse :

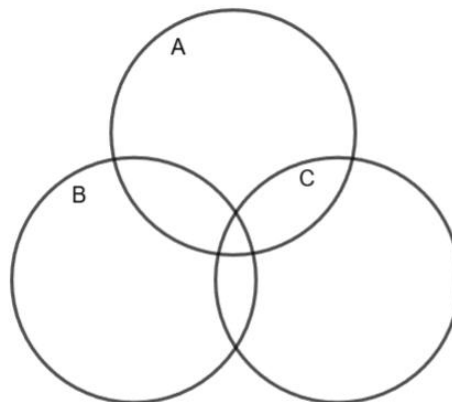
Mariame pourra former au maximum **13 régions fermées** lorsqu'elle effectuera sa quatrième figure.



Première solution, le décompte :

Une première démarche pour aborder l'énigme serait de tenter différents placements de cercle et de faire le décompte des régions créées.

On peut commencer à partir de la configuration des trois cercles donnés. On étudie alors les manières de placer un quatrième cercle et le nombre de régions que la figure décrit.





Si le quatrième cercle croise :

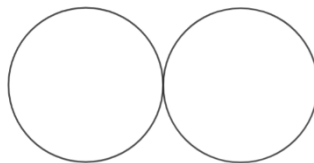
- | | |
|---|-----------------------|
| • A en 1 seul point, | on compte 8 régions |
| • A en 2 points, | on compte 9 régions |
| • A et B en 1 seul point chaque*, | on compte 9 régions |
| • A en 2 points et B en 1 seul, | on compte 10 régions |
| • A et B en 2 points chaque, | on compte 11 régions |
| • A et B en 1 point, et C en 2 points*, | on compte 11 régions |
| • A en 1 point, B et C en 2 points*, | on compte 12 régions |
| • Tous les cercles en 2 points, | on compte 13 régions. |

**Des cas de figure plus difficiles à visualiser sont illustrés plus loin.*

Le plus de régions que l'on arrive à compter est 13, c'est donc le plus que l'on peut créer avec 4 cercles. Certaines personnes remarqueront peut-être qu'il y a plusieurs cas qui sont laissés hors de cette énumération. En effet, comme les cercles sont de même taille et que la situation est symétrique, les cas énumérés ci-haut sont suffisants!

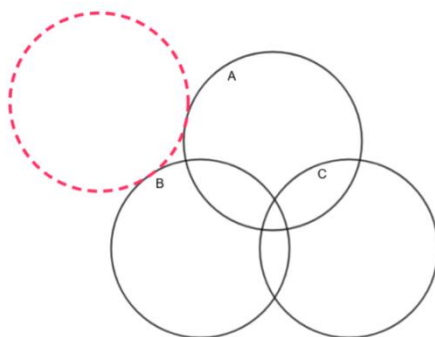
Cas de figures plus difficiles à visualiser

Deux cercles peuvent se croiser en un seul point, comme deux disques solides qui se touchent. On dit que ces cercles sont tangents. Voici deux cercles tangents l'un à l'autre :

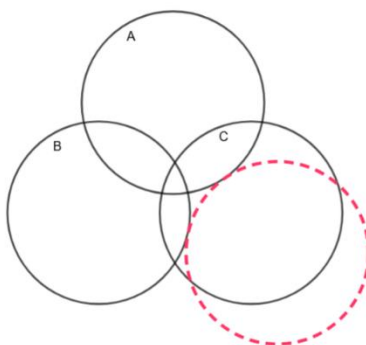




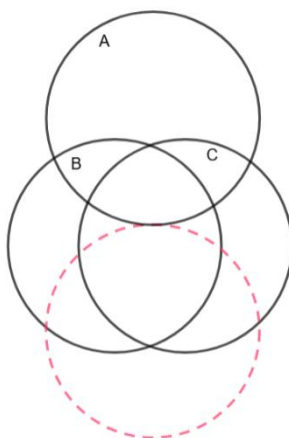
Voici le cas où le quatrième cercle croise A et B en un seul point. Autrement dit, il est tangent à A et B. Il y a 9 régions.



Le cercle rose peut aussi croiser A et B une seule fois, mais C deux fois, comme suit. Il y a 11 régions.



Finalement, le quatrième cercle peut être tangent au cercle A (le croiser en un seul point) et croiser B et C en deux points chaque. Dans ce cas, il y a 12 régions.

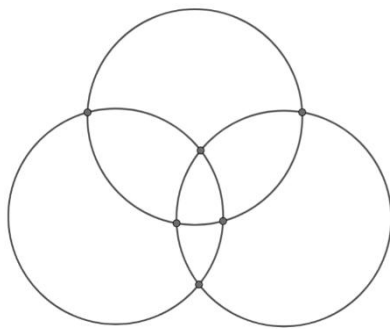




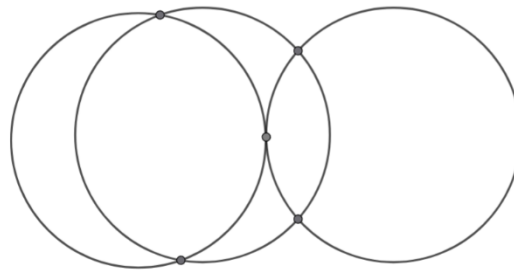
Deuxième solution, les intersections :

Une autre façon d'aborder cette énigme est de repérer un lien entre les points d'intersections entre les cercles et le nombre de régions fermées.

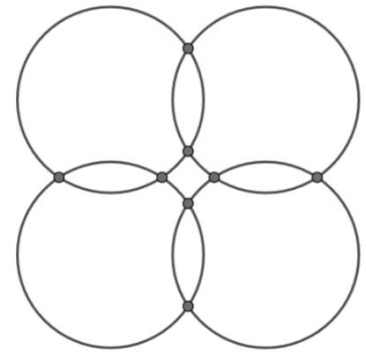
En comptant le nombre de points d'intersections et le nombre de régions pour plusieurs configurations de cercles, on remarque un motif simple, mais très intéressant :



6 intersections
7 régions fermées



5 intersections
6 régions fermées



8 intersections
9 régions fermées

Lorsque des cercles se croisent, il y a toujours une région fermée de plus que le nombre d'intersections entre les cercles.

On peut donc tenter de maximiser le nombre d'intersections, ce qui est un problème qui semble plus abordable que de maximiser les régions fermées.

Un cercle peut seulement croiser un autre cercle en 1 point ou en 2 points.

Sachant tout cela, on comprend que l'on cherche à produire la figure à quatre cercles avec le plus de points d'intersections possibles. Chacun des cercles peut croiser les autres en 2 points. Voici les croisements possibles :

- A et B
- A et C
- A et D
- B et C
- B et D
- C et D

Chacun de ces 6 croisements donne 2 points d'intersections. Avec 12 points d'intersections au maximum, on ajoute 1 pour trouver le nombre maximal de régions :

Mariame peut donc former un maximum de 13 régions.