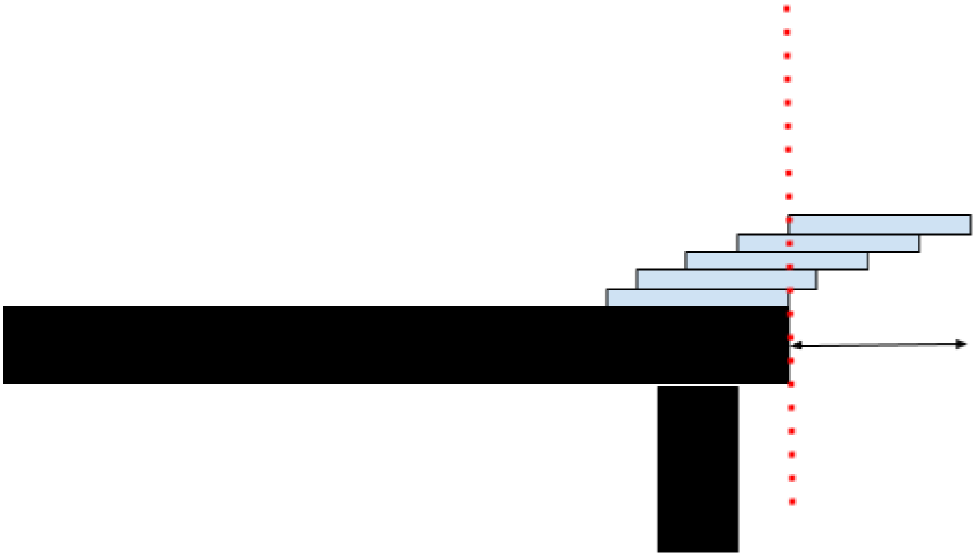
SURPLOMB MAXIMAL

LES DÉFIS

Défi 1

Objectif :

Disposer une série de cartes les unes sur les autres afin que l'une d'entre elle soit complètement en surplomb*.
*Une partie d'un objet est en surplomb lorsqu'elle n'est plus au-dessus de la base.



Questions pour orienter la démarche :

Avec une seule carte, comment faire pour savoir que le surplomb ne pourrait pas être plus grand ?

Devrait-on ajouter les cartes sous celles déjà placées ou au-dessus de celles-ci ?

Pouvez-vous exprimer mathématiquement la position des cartes par rapport à la base ?

<u>Défi 2</u>

Objectif :

Disposer 8 objets (identiques) de votre choix de manière à maximiser le surplomb (dominos, jetons, etc.).

Questions pour orienter la démarche :

Avez-vous découvert quelque chose au défi 1 qui pourrait vous aider à placer les objets pour ce nouveau défi ?

En utilisant un objet plus long, vous pourrez peut-être vous rendre plus loin. Pourrait-on calculer le surplomb de sorte qu'il ne dépende pas de la longueur de l'objet choisi ?

Considérant la remarque précédente, pouvez-vous atteindre le même surplomb quel que soit l'objet choisi ?

Quelles caractéristiques de l'objet peuvent rendre plus facile ou plus difficile de maximiser le surplomb ? (Ex. forme, poids, couleur, etc.)

Quelques explications

Comment placer les objets pour réussir à atteindre un surplomb maximal?
Voyons voir!

Nous présenterons ici deux méthodes classiques qui permettent de maximiser le surplomb selon deux situations. Pour clarifier les explications, nous supposerons que l'objet utilisé est une carte à jouer classique (dont l'épaisseur est négligeable).

Situation 1 : Une seule carte par étage est permise

Dans cette situation, pour résoudre le problème, nous allons raisonner d'une façon qui pourrait sembler contraire à la manière « naturelle » de placer les cartes, c'est-à-dire en considérant d'abord les cartes qui sont au-dessus de la pile.

Pour obtenir le surplomb maximal expérimentalement, vous pourriez placer une carte sur la base et la pousser jusqu'à ce que vous ne puissiez plus la pousser sans qu'elle tombe. Ensuite, placer une carte *sous* la première, sans changer la position de celle-ci, et répéter l'expérience. Ainsi de suite, avec le nombre souhaité de cartes, en ajoutant toujours les nouvelles cartes sous les cartes déjà présentes.

Jusqu'à quel point sera-t-il possible de pousser les cartes ? Voilà une question bien complexe, qui vaut la peine d'être décomposée !

- **Comment une carte peut-elle tenir si une partie de celle-ci est en surplomb ?**

La condition nécessaire et suffisante (sans intervention extérieure) est que la portion de la masse au-dessus de la base soit *au moins égale* à la portion en surplomb. C'est lorsque ces deux quantités seront égales que le surplomb maximal sera atteint. Le point qui égalise ces quantités est appelé le *centre de masse*. Obtenir le surplomb maximal revient donc à amener le centre de masse au bord de la base.

- **Comment trouver le centre de masse d'une carte ?**

Puisque les cartes sont bien balancées, c'est-à-dire que leur masse est répartie uniformément sur la surface, le centre de masse d'une carte sera le centre de sa surface.

- **Comment trouver le centre de la surface d'une carte ?**

Voilà un problème que nous savons résoudre ! Puisque la carte est de forme rectangulaire, il existe plusieurs manières de trouver le centre de la surface d'une carte. Une façon précise de le faire, puisqu'elle ne requiert pas de mesure, est de trouver le point de rencontre des diagonales de la carte.

Nous voyons donc que le centre de la surface (et le centre de masse) d'une carte est situé à égale distance des côtés opposés. Ainsi, si nous faisions un surplomb avec une seule carte, nous pourrions placer la moitié de cette carte sur la base et l'autre moitié au-dessus du vide. Nous aurions alors un surplomb maximal de $\frac{1}{2}$ carte.

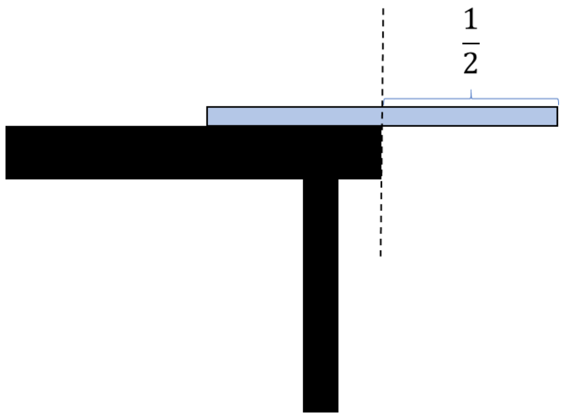


Figure 1 Surplomb maximal en utilisant 1 carte

Lorsqu'il n'y a qu'une seule permise par étage, pour maximiser le surplomb, il faudra que la carte située au dernier étage soit décalée de la moitié ($\frac{1}{2}$) par rapport à la carte placée juste en dessous d'elle.

- **Comment trouver le centre de masse lorsqu'il y a deux cartes ?**

Déterminer le centre de masse d'un ensemble de cartes décalées est moins aisé que de déterminer celui d'une seule carte puisque la masse de celui-ci n'est plus uniformément répartie. Regardons ce qui se produit lorsque nous plaçons deux cartes sachant que, comme nous l'avons vu plus tôt, la première carte sera décalée de la moitié de sa longueur.

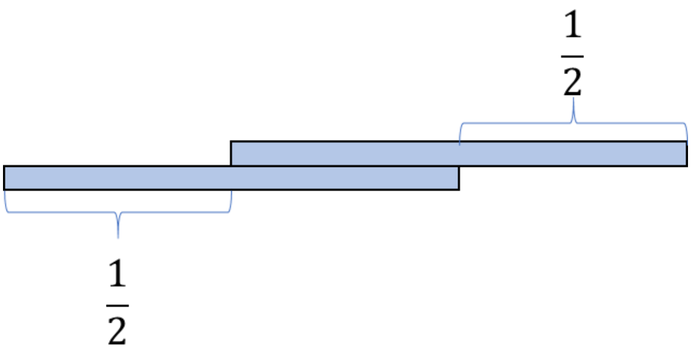


Figure 2 Empilement de deux cartes lorsque la carte supérieure a un surplomb de la moitié de sa longueur.

Comme nous pouvons le remarquer, la moitié de chacune des deux cartes « dépasse » des deux côtés, alors que l'autre moitié de ces cartes sont superposées. En remarquant la symétrie, nous pouvons voir que le centre de masse se trouvera à nouveau au centre de la surface de l'ensemble. Comme le centre de l'ensemble correspond au centre de la partie centrale, celui-ci sera à mi-chemin de la moitié d'une carte, c'est-à-dire au quart de la carte.

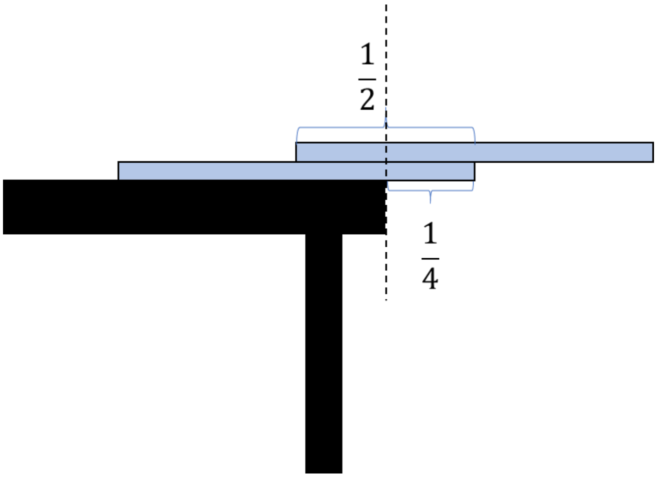


Figure 3 Surplomb maximal en utilisant deux cartes

Pour atteindre le surplomb maximal à deux cartes, nous devons donc, après avoir décalé la première carte de la moitié de sa longueur ($\frac{1}{2}$), décaler la seconde du quart ($\frac{1}{4}$).

- **Comment trouver le centre de masse lorsqu'il y a trois cartes et plus ?**

Un coup d'œil rapide nous permet de remarquer que, lorsqu'il y a trois cartes, l'ensemble n'est plus symétrique. Il faut donc trouver une nouvelle façon de situer le centre de masse. Rappelons que ce que nous cherchons est le point pour lequel la masse à droite et la masse à gauche sont équivalentes, peu importe la façon dont elle est répartie dans chacune de ces moitiés.


Figure 4 Empilement de 3 cartes sachant le décalage des deux premières cartes.

Pour trouver ce point, considérerons, dans l'ensemble de trois cartes, deux ensembles que nous connaissons : l'ensemble des deux premières cartes, et la troisième carte. Connaissant l'emplacement du centre de masse de ces deux ensembles, et sachant que le premier est deux fois plus lourd que le second, il est possible de trouver à quel endroit se trouve le centre de masse de ces deux ensembles réunis.

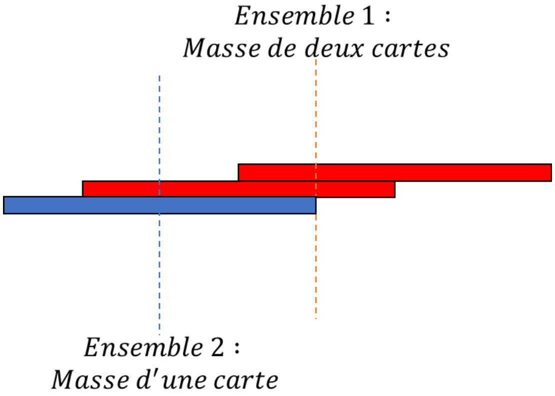


Figure 5 Centre de masse des deux premières cartes (rouge) et de la troisième (bleu).

Il faudra alors trouver le point qui se trouve deux fois plus près du centre de masse de l'ensemble deux fois plus lourd, c'est-à-dire au tier de la distance entre les deux centres de masse connus (partant du centre de masse du premier ensemble).

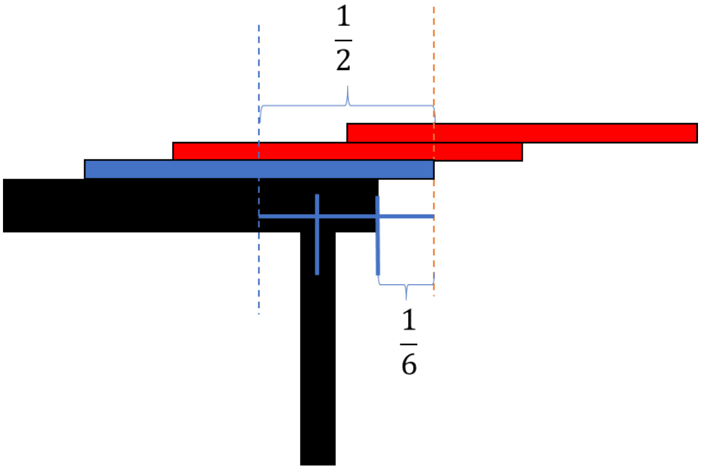


Figure 6 Surplomb maximal pour 3 cartes en plaçant une seule carte par étage

En observant attentivement la dernière image, on remarque que le centre de masse de l'ensemble des trois cartes se situe au tier de la moitié d'une carte, donc au sixième ($\frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$) de la carte inférieure.

Le même processus pourrait être fait pour déterminer le centre de masse d'un ensemble de quatre cartes, cinq cartes, etc. (respectant toujours les décalages précédents). Nous trouvons alors les décalages successifs $\frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \ldots$

Ainsi, la carte au dernier étage doit être décalé de $\frac{1}{2}$, celle à l'avant-dernier étage doit quant à elle être décalée d'un quart ($\frac{1}{4}$) par rapport à celle l'étage précédent, cette dernière étant décalée d'un sixième ($\frac{1}{6}$) de la précédente, elle-même décalée d'un huitième ($\frac{1}{8}$) de sa longueur, et ainsi de suite.

Les cartes sont maintenant placées, ne reste plus qu'à calculer le surplomb !

Avec cette stratégie, déterminer le nombre de cartes minimum pour obtenir une carte complète en surplomb revient à déterminer le nombre de termes nécessaires afin que la somme des fractions unitaires à dénominateur pair soit supérieure ou égal à 1. Symboliquement, nous dirons que nous voulons trouver le nombre $n \; tel \; que$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq 1.$$

Avec $n = 4$, on trouve $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{25}{24} > 1.$

Figure 7 Une carte mesurant 12 unités atteint un surplomb est d'environ 12,5 unités, l'extrémité de la dernière carte est donc à environ 25/24 longueur de carte du bord du livre.

Dans le défi 2, ayant 8 cartes, les cartes doivent être décalées comme suit :

Position de la carte (en partant du sommet)	1ère	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e
Décalage en fonction de celle en dessous	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{16}$

Cela nous permet d'obtenir un surplomb théorique de :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{16}=\frac{761}{560}\approx 1{,}3589$$

Pour une carte à jouer ayant une longueur de 88mm, cela signifie un surplomb *théorique* de près de 120mm.

Figure 8 Surplomb maximal avec 8 cartes en utilisant un empilage simple.

Pour aller plus loin

En conservant le même raisonnement, le décalage du sommet par rapport à base (d_n) dépend du nombre de cartes n de la façon suivante :

$$d_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

La somme surlignée en jaune à la ligne précédente est une série bien connue en mathématiques : *la série harmonique*. Cette série a de particulier qu'elle *diverge*, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de limite à la valeur que l'on peut atteindre en ajoutant des termes.

Que cela signifie-t-il dans notre situation ?

En théorie, il sera possible d'atteindre un surplomb aussi grand que souhaité ! Toutefois, il est possible de montrer que les sommes partielles de la série harmonique augmentent de façon logarithmique en fonction du nombre de termes, et donc que le nombre de cartes nécessaires grandira de façon exponentielle lorsque nous voudrons augmenter le surplomb.

Par exemple, alors que les 10 premières cartes permettent d'atteindre un surplomb d'environ 1,46 fois la longueur d'une carte, il faudra 90 cartes supplémentaires (10 fois plus de cartes) pour atteindre 2,59 (augmentation de 1,15). Ensuite, pour atteindre 3,74 (soit une autre augmentation de 1,15), il faudra 900 cartes supplémentaires...

$$d_{\boxed{10}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right) \approx 1{,}46$$

$* \ 10^1 \qquad + 1 * 1{,}15$

$$d_{\boxed{100}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{98}+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right) \approx 2{,}59$$

$* \ 10^2 \qquad +2 * 1{,}15$

$$d_{\boxed{1000}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{998}+\frac{1}{999}+\frac{1}{1000}\right) \approx 3{,}74$$

Situation 2 : Il est possible de placer plus d'une carte par étage

Dans ce cas, la solution classique consiste à utiliser des cartes comme contrepoids, afin de supporter la masse des cartes qui seront en surplomb.

En utilisant cette technique, il est possible de venir à bout du défi 1 en n'utilisant que 3 cartes ! Pour ce faire, il faudra d'abord placer une première carte dont une moitié sera sur la base, alors que l'autre sera en surplomb. Ensuite, la seconde carte sera au-dessus de la première, de façon à ce qu'elle soit entièrement au-dessus du livre, mais que l'une de ses extrémités correspondent à l'extrémité du livre. Enfin, la troisième carte pourra être placée sur la section en surplomb de la première carte, et elle sera entièrement en surplomb (un surplomb d'exactement 1) !

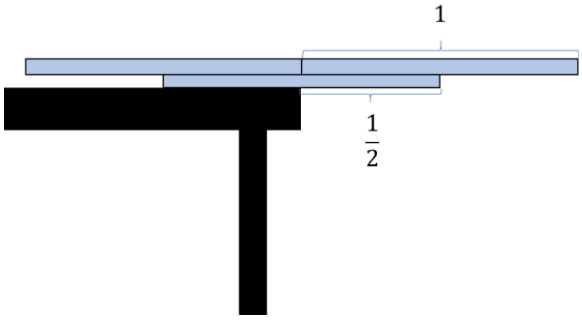


Figure 9a Schéma d'un surplomb théorique de 1 atteint en utilisant 3 cartes grâce à un empilage multiple.

Figure 9b Surplomb de 1 atteint en utilisant seulement 3 cartes grâce à un empilage multiple.

Pour résoudre le deuxième défi, il existe plusieurs façons d'empiler les cartes, en utilisant un contrepoids, qui donneront de bons résultats (meilleurs qu'à la situation 1). Sur la photo ci-dessous, nous présentons un surplomb de 1,5 fois la longueur d'une carte. Seriez-vous en mesure de déterminer comment les cartes ont été placées pour obtenir ce surplomb ?

Figure 10 Surplomb de 1,5 en utilisant 8 cartes avec un empilage multiple

Êtes-vous en mesure de trouver une méthode pour vous rendre plus loin ?